تمرين:

نفرض لدينا مجتمعا احصائيا طبيعيا $N(\mu, \sigma^2)$ لـ X ولنأخذ منه عينة عشوائية حجمها n ولنوجد المقدران المنتهية لكلا من μ و σ^2 على أساس هذه العينة بطريقة العزوم.

الحل:

بما أن المجتمع الاحصائي يحوي وسيطين هما الأول μ والثاني σ^2 عندئذ لايجاد المقدران النقطية لكلا من μ و σ^2 نحتاج الى حل جملة معادلتين وهما

① $m_1 = \alpha_1 \big|_{\mu=\hat{\mu}}$

② $m_2 = \alpha_2 \big|_{\mu=\hat{\mu},\ \sigma^2=\hat{\sigma}^2}$

ومن المعادلة رقم (1)

$\Rightarrow \bar{X} = \mu \big|_{\mu=\hat{\mu}} \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$

أي أن المقدر النقطي للوسيط μ يمثل الوسط الحسابي وواضح أنه تابع فقط لمتغيرات العينة العشوائية ومن المعادلة ②

$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = E X^2 \big|_{\mu=\hat{\mu},\ \sigma^2=\hat{\sigma}^2}$

$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \sigma^2 + \alpha_1^2 \big|_{\mu=\hat{\mu},\ \sigma^2=\hat{\sigma}^2} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2$

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{X}^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_i)$

وهو المقدر النقطي للوسيط σ^2 والمقدر النقطي للوسيط μ

طريقة الاحتمالية العظمى لايجاد المقدرات النقطية:

نفرض لدينا مجتمع احصائيا موصوفا بتوزيع احتمالي

$P_x(x, \theta)$ أو $f(x, \theta)$

حيث θ هو الوسيط المجهول في هذا المجتمع ولنأخذ عينة عشوائية حجمها n

عندئذ لايجاد المقدر النقطي المجهول θ

نوجد L حيث L هي عبارة عن:

$$L = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P_x(x_i, \theta) = P_{x_1}(x_1) \cdot P_{x_2}(x_2) \ldots P_{x_n}(x_n) = P(x_1, x_2 \ldots x_n) \\ \prod_{i=1}^{n} f_x(x_i, \theta) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2) \ldots f_{x_n}(x_n) = f(x_1, x_2 \ldots x_n) \end{cases}$$

حيث ندعوها تابع الاحتمالية العظمى والبعض تسميه تابع المعقولية العظمى ومن ثم نوجد $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ ونحل المعادلة

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Big|_{\theta = \hat{\theta}}$$

وتدعى المعادلة الأخيرة معادلة الاحتمالية العظمى ومعادلة المعقولية العظمى

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$$

وبما أن L و $\log L$ لهما نفس النهاية العظمى عندئذ يمكن أن نحصل على مقدار الوسيط θ من حل المعادلة التالية

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = 0 \Big|_{\theta = \hat{\theta}} \quad , \quad \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} < 0$$

مثال: لنفرض لدينا مجتمع احصائي برنولياً وسيطه P ولناخذ منه عينة عشوائية حجمها n ولنوجد المقدر النقطي للوسيط P لطريقة الاحتمالية العظمى

الحل: بما أن المجتمع الاحصائي البرنولي يحوي وسيط واحد وهو P عندئذ نحتاج أن نحل معادلة واحدة وهي

$$\frac{\partial L}{\partial P} = 0 \Big|_{P = \hat{P}}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial P} = 0 \Big|_{P = \hat{P}}$$

لدينا $L = \prod_{i=1}^{n} P(x_i, P) = \prod_{i=1}^{n} P^{x_i}(1-P)^{1-x_i}$

$$= P^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-P)^{n-\sum x_i} = \prod_{i=1}^{n} P^{x_i}(1-P)^{1-x_i} = P^{x_1} P^{x_2} \ldots P^{x_n}(1-P)^{1-x_1} \ldots (1-P)^{1-x_n}$$

$$= P^{\sum_{i}^{n} x_i}(1-P)^{n-\sum x_i}$$

حيث أما نقل تابع الاحتمالية العظمى أو تابع المعقولية العظمى نأخذ له للطرفين:

$$\ln L = \sum_{1}^{n} x_i \ln p + (n - \sum_{1}^{n} x_i) \ln(1-P)$$

نشتق بالنسبة للوسيط P جزئياً

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial P} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{P} - (n - \sum_{i}^{n} x_i)\frac{1}{1-P}$$

بالتالي من معادلة الإمكانية العظمى نجد ان

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = 0 \Big|_{p=\hat{p}} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{p}} - \frac{(n - \sum x_i)}{1-\hat{p}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{p}} = \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\hat{p}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{p}\sum x_i = \hat{p}n - \hat{p}\sum^{n} x_i$$

$$\Rightarrow \sum^{n} x_i = n\hat{p} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum^{n} x_i}{n} = \bar{X}$$

اي ان المقدر النقطي لمجتمع الاحصائي البرنولي هو المتغيرات للعينة العشوائية المأخوذة منه

مثال

مجتمع احصائي بواسوني وسيطه λ ، ناخذ منه عينة عشوائية حجمها n ولنوجد المقدر النقطي الوسيط المجتمع الاحصائي البواسوني بطريقة الامكانية العظمى.

الحل:

$$f_\lambda(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x}}{x!} \quad ; \quad x = 0,1,2 \dots \quad ; \quad \lambda > 0$$

ومن ثم

$$L = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$$

ناخذ لوغرتم الطرفين

$$\ln L = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln \lambda + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0 \Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} \Rightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\lambda}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\lambda}} = n \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

اي ان المقدر النقطي للمجتمع الاحصائي البواسوني هو الوسط الحسابي

ملاحظة:

إذا كان المجتمع الإحصائي العظمى يحوي وسيطين الأول θ_1 والثاني θ_2 وأخذنا عينة عشوائية حجمها n من هذا المجتمع عندئذ لإيجاد المقدرين النقطيين لكل من θ_1, θ_2 نحتاج إلى حل جملة معادلتين

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0 \Big|_{\theta_1 = \hat{\theta}_1} \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \Big|_{\theta_1 = \hat{\theta}_1}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0 \Big|_{\substack{\theta_1 = \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 = \hat{\theta}_2}} \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \Big|_{\substack{\theta_1 = \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 = \hat{\theta}_2}}$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على المقدرات النقطية وفي الحالة التي يكون فيها لدينا k وسيط نحتاج إلى حل k معادلة

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = 0 \Big|_{\theta_1 = \hat{\theta}_1}$$

بحل جملة هذه المعادلات نحصل على الوسطاء النقطية

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_2} = 0 \Big|_{\substack{\theta_1 = \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 = \hat{\theta}_2}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0 \Big|_{\substack{\theta_1 = \hat{\theta}_1 \\ \theta_2 = \hat{\theta}_2 \\ \theta_k = \hat{\theta}_k}}$$

مثال:

نفرض أنه لدينا مجتمع إحصائي طبيعي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ولنأخذ منه عينة عشوائية حجمها n ولنوجد كل من المقدرات النقطية لكل من μ و σ^2 بطريقة الاحتمالية العظمى

الحل:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} f_n(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\Rightarrow \ln L = \frac{-n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

وبما أنه لدينا وسيطين الأول μ والثاني σ^2 فسوف نحتاج حل جملة معادلتين من الشكل

① $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 \Big|_{\mu=\hat{\mu}}$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0 \Big|_{\mu=\hat{\mu},\ \sigma^2=\hat{\sigma}^2}$ ②

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\sigma^2}$$

بالتالي من معادلة ١ معادلة العظمى الأولى نجد أن

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\hat{\mu})}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\hat{\mu} \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

وهو نفس المقدار النقطي الذي حصلنا عليه

ولدينا أيضاً

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2(\sigma^2)^2}$$

ومن معادلة الاحتمالية العظمى الثانية أي ② نجد أن

$$-\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\sum(x_i-\hat{\mu})^2}{2(\hat{\sigma}^2)^2} = 0 \Rightarrow n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\hat{\sigma}^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

* $E\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = n-1 \Rightarrow \frac{n}{\sigma^2}E\hat{\sigma}^2 = n-1 \Rightarrow E\hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)}{n}$

* $V\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \Rightarrow \frac{n^2}{\sigma^4}V(\hat{\sigma}^2) = 2(n-1)$

$$\Rightarrow V(\hat{\sigma}^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$$

$$\Rightarrow V(\hat{\sigma}^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

المقدر المنصف (الغير منحاز):

بفرض لدينا مجتمعاً احصائياً موصوفاً بتوزيع احتمالي معطى وسيطه المجهول θ ولنأخذ منه عينة عشوائية بحيث المقدر النقطي للوسيط θ لهذا المجتمع

$$T = \hat{\theta} = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

عندئذٍ بالتعريف نقول عن T أو عن $\hat{\theta}$ أنه مقدر غير منحاز (منصف) إذا تحقق الشرط $ET = E\hat{\theta} = \theta$

هذا يعني أنه عند التوقع الرياضي المقدر النقطي للوسيط θ يساوي ذلك الوسيط فيعني أنه مقدر منصف وعلى سبيل المثال إذا عدنا إلى المجتمع الإحصائي البرنولي والمجتمع الإحصائي البواسوني الذي وجدنا فيهما أن:

$$\hat{\lambda} = \bar{X} \qquad \hat{p} = \bar{x}$$

نجد أن التوقع

$$E\hat{p} = E\bar{x} \quad , \quad Ex = P$$

$$E\hat{\lambda} = E\bar{X} \quad , \quad Ex = \lambda$$

الوسيط النقطي المقدر البرنولي هو وسيط منصف وكذلك الأمر للمقدر البواسوني

مثال:

بفرض لدينا مجتمع احصائياً $X \sim N(3, \sigma^2)$ ولنأخذ منه عينة عشوائية حجمها n وليكن

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 3)^2$$

والمطلوب: ① عين المقدر النقطي للوسيط σ^2

② أثبت أن المقدر T هو مقدر غير منحاز (أو منصف) للوسيطين

الحل: ومن أجل ذلك لنكن أن نكتب والضرب بـ n ونقسم على σ^2

$$\frac{nT}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - 3)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

وبالتالي التوقع

$$E\frac{(nT)}{\sigma^2} = n \Rightarrow \frac{n}{\sigma^2}ET = n \Rightarrow ET = \sigma^2$$

أي أن T هو مقدر منصف أو غير منحاز لـ σ^2

التباين:

$$V\frac{(nT)}{\sigma^2} = 2n \Rightarrow \frac{n^2}{\sigma^4}V(T) = 2n \Rightarrow V(T) = \frac{2\sigma^4}{n}$$

المقدر النقطي المناسب:

اذا كان لدينا T مقدراً نقطياً لوسيط مجتمع احصائي θ على اساس عينة عشوائية حجمها n عندئذٍ بالتعريف نقول ان T انه كذلك مقدر متسق اذا تحقق شرطان

① المقدر الرياضي لـ T منصف أي أن $ET = \theta$

② التباين $V(T) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

واذا عدنا الى المثال السابق والذي وجدنا فيه ان التوقع الرياضي للمقدر النقطي لـ σ^2 هو σ^2 اي انه منصف ووجدنا ان $V(T) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ وبلاحظ انه $V(T) = \frac{2\sigma^4}{n}$

حيث ان n كبيرة بقدر كافي

هذا يعني أن T مقدر متسق

ملاحظة

اذا كان لدينا $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

مقدراً نقطياً للوسيط σ^2 في مجتمع احصائي طبيعي فيه μ مجهول وذلك على اساس عينة [redacted] حجمها n عندئذٍ هل هذا المقدر النقطي هو مقدر متسق ام لا

الحل:

$$\frac{nT}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\Longrightarrow E\left(\frac{nT}{\sigma^2}\right) = n-1$$

$$\Longrightarrow \frac{n}{\sigma^2} ET = n-1 \Longrightarrow ET = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

ليس مقدراً منصفاً لـ σ^2

لكن يكون مقدراً منصفاً لـ σ^2 اذا كانت n كبير بقدر كافي

$$V\left(\frac{nT}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \Longrightarrow V(T) = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4$$

اذا كان n كبيرة بقدر كافي التباين سوف يكون مقدراً منصفاً

س: هل المقدر النقطي $\bar{X}$ لـ المجتمع الاحصائي الطبيعي μ على أساس عينة عشوائية حجمها n هو مقدر متسق أم لا؟

الحل:

من المعلوم ان المقدر النقطي لوسيط المجتمع الاحصائي $\hat{\mu} = \bar{X}$ ومنه التوقع الرياضي $E\hat{\mu} = E\bar{X} = EX = \mu$ ، $V(\hat{\mu}) = V(\bar{X}) = \frac{V(x)}{n}$

ومنه ثم متسق

مثال:

نفرض لدينا مجتمع احصائي منتظم ومستمر على المجال θ ، 0 حيث θ وسيط ولنأخذ عينة عشوائية حجمها n والمطلوب.

أيجاد المقدر النقطي للوسيط θ بطريقة العزوم ثم بين ان المقدر النقطي الناتج متحيز ومتسق بالنسبة للوسيط θ

الحل:

لدينا المجتمع الاحصائي المنتظم المستمر وسيط واحد θ

$$m_1 = \alpha_1 \Big|_{\theta = \hat{\theta}}$$

$$\bar{X} = \frac{\theta}{2} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} \Longrightarrow \hat{\theta} = 2\bar{X}$$

$$E(\hat{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E\bar{X} = 2EX = 2\frac{\theta}{2} = \theta$$

$$V(\hat{\theta}) = V(2\bar{X}) = 4V(\bar{X}) = \frac{4V(x)}{n} = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أي أن هذا المقدر هو مقدر متسق وتباين يسعى الى الصفر

المقدر الاكفوء أو الأفضل

نفرض لدينا مجتمع احصائي وسيطه المجهول θ وقد يكون منفصل وقد يكون مستمر ولنأخذ منه عينة عشوائية حجمها n وليكن T_1 ، T_2 مقدرين نقطيين للوسيط θ وحيث هذين المقدرين متحيزين عندئذ نقول عن المقدر T_1 انه أكفوء من المقدر T_2 أو أفضل أو أكفأ

$$V(T_1) = V(T_2)$$

في هذه الحالة يكون فيها للمقدرين نفس الفعالية

مثال:

نفرض لدينا مجتمع احصائي بواسوني وسيطه λ وحجمه n ولنأخذ $T_1 = \bar{X}$ و $T_2 = \frac{X_1 + 3X_3}{4}$ مقدرين نقطيين للوسيط λ عندئذ أيهما أفضل أو أيهما أكفئ؟

الحل:

$$ET_1 = E\bar{X} = EX = \lambda$$

$$ET_2 = E\left(\frac{X_1 + 3X_1}{4}\right) = \frac{1}{4}(EX_1 - 3EX_3)$$

$$= \frac{1}{4}(\lambda + 3\lambda) = \frac{4\lambda}{4} = \lambda$$

$$V(T_1) = V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\lambda}{n}$$

$$V(T_2) = \frac{1}{16} V(X_1) + 9V(X_3) = \frac{1}{16}(\lambda + 9\lambda) = \frac{10\lambda}{16}$$

وبمقارنة $V(T_1)$ و $V(T_2)$ الذي تباينه أقل يكون هو الأكفئ أو الأفضل